Grenzwerte von Zahlenfolgen

ε-Umgebungen

Datei Nr. 40031

Stand 16. November 2016

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Die Beweis- und Berechnungsmethoden für Folgen, welche Horizontalstreifen verwenden, sind eigentlich ein hervorragendes Beispiel für mathematische Denkweisen. Hier kann der Leser erkennen, wie es die Mathematik schafft, das unendlich lange Annähern an eine Zahl, die wir dann Grenzwert nennen, durch Berechnungen in den Griff zu bekommen.

Leider geraten auch diese Verfahren im Zuge des G8 und der Niveauabsenkungen (der neue Trend heißt offiziell anders!) immer mehr in den Hintergrund, bzw. verschwinden aus den Lehrplänen.

Studenten haben es daher immer schwerer, Anschluss zu bekommen. Und wenn sie diese Verfahren vergessen oder gar nicht erst gelernt haben, können sie hier nachlernen.

Schüler, die diese Verfahren im Unterricht erlernen, haben damit ihre Schwierigkeiten. Daher versuche ich, diese Thematik so anschaulich wie möglich zu machen. Ich zeige sowohl die Beweistechnik mit dem Horizontalstreifen, aber auch übliche Beispiele dazu von leicht bis schwer.

Ich beginne direkt damit, dass ich zeige, was **Horizontalstreifen** sind. **Dazu muss man ein mit Beträgen umgehen können, genauer gesagt mit Betragsungleichungen**.
Das lernen alle einmal und vergessen es ganz schnell, weil man zu wenig damit arbeitet.

Daher habe ich im Anhang des Textes die Grundlagen dazu zusammengefasst. Dort bitte nachlesen, wenn Schwierigkeiten auftreten.

Die ausführlichen Texte dazu haben die Nummer 12160 und 12161.

ACHTUNG

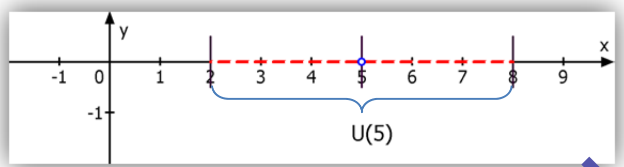
**Wer diesen Text als Sammlung von Aufgaben verwenden will, verwende dazu das Aufgabenblatt auf Seite 38.
Dort sind alle Beispiele des Textes als Aufgaben formuliert.
Die Lösungen sind dann die Beispiele im Laufe des Textes**

Inhalt

1 Was sind Umgebungen?

In der Analysis benötigt man immer wieder sogenannte Umgebungen einer Zahl.

Beispiele:



a) Die Menge aller Zahlen, die von 5 einen Abstand von höchstens 3 haben.

Man schreibt dies gerne so: $U(5) = [\ 2 ; 8\ ]$

Dazu gehören alle reellen Zahlen **von 2 bis 8.**

Die Randzahlen 2 und 8 haben von 5 den Abstand (genau) 3 und gehören somit zu diesem Intervall, weshalb es ein abgeschlossenes Intervall ist.

Diesen Abstand vom Zentrum 5 kann man auch den Radius nennen. Dazu passt die Vorstellung eines Kreises, der hier aber nur eindimensional ist und somit zur Strecke wird. Jede Umgebung kann man durch eine Ungleichung beschreiben. Diese kann verschiedene Formen haben:

Also Doppelungleichung: $2 \le x \le 5$

Als Betragsungleichung: $|x - 5| \le 3$

Betragsungleichungen werden am meisten verwendet. Sie sind nicht gleich verständlich.

Einschub: Mit dem Betrag aus einer Differenz berechnet man den Abstand zweier Zahlen:

$|8 - 5| = |3| = 3$ ist der Abstand der Zahlen 8 und 5, nämlich 3.

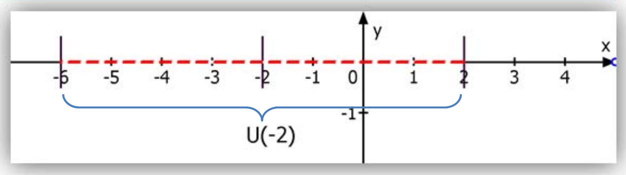
$|2 - 5| = |-3| = 3$ ist der Abstand der Zahlen 2 und 5, nämlich 3.

Hier erkennt man schon, dass der Betrag verhindert, dass der berechnete Abstand eine negative Zahl ist. $|x - 5|$ ist dann der Abstand einer Zahl x von der Zahl 5. Dabei ist es wegen des Betrags natürlich egal, ob x kleiner oder größer als 5 ist.

Jetzt versteht man, dass man mit der Gleichung $|x - 5| = 3$ die Zahlen sucht, deren Abstand von 5 gleich 3 ist. Die Ungleichung $|x - 5| \le 3$ hat als Lösung genau die Zahlen, die von 5 einen Abstand von höchstens 3 haben, das sind dann alle Zahlen **von 2 bis 8**.

Und die Ungleichung $|x - 5| < 3$ beschreibt dann alle Zahlen, deren Abstand von 5 kleiner als 3 ist, das sind alle Zahlen **zwischen 2 und 8**.

Übrigens kann man im Betrag die Differenz vertauschen: $|x - 5| = |5 - x|$.

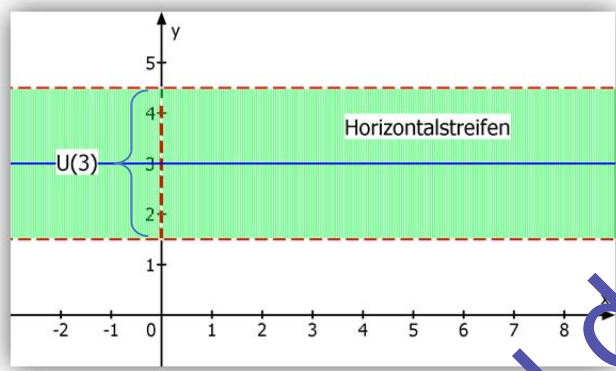


b) Die Menge aller Zahlen, die von -2 einen Abstand von höchstens 4 haben.

$U(-2) = [\ -6 ; 2\ ]$. Als Ungleichung:

$-6 \le x \le 2$ bzw. $|x - (-2)| \le 4$ oder besser: $|x + 2| \le 4$

Umgebungen auf der y-Achse:



c) Die Umgebung der Zahl 3 mit dem Radius 1,5 ist das y-Intervall:

$U(3) = \left]\, 1{,}5\,;\, 4{,}5 \,\right[$ bzw.

$1{,}5 < y < 4{,}5$ bzw. $|y-3| < 1{,}5$

Jetzt handelt es sich um ein offenes Intervall, eine offene Umgebung, weil der Abstand 1,5 ausgeschlossen worden ist.

Man kann auf dieser Umgebung auch einen **Horizontalstreifen** machen: Man muss dies nur zweidimensional betrachten. Für die Punktmenge im Innern des Streifens gilt im Grunde dieses Ungleichungssystem: $\begin{cases} |y-3| < 1{,}5 \\ x \in \mathbf{R} \end{cases}$.

Meistens lässt man jedoch die zweite Zeile weg. So wie $y = 3$ nicht nur die Stelle 3 auf der y-Achse bedeutet, sondern zweidimensional gesehen die horizontale Gerade bedeutet, so stellt dann $|y-3| < 1{,}5$ den offenen Horizontalstreifen dar.

Information: Dahinter steckt der Grundsatz: Da x nicht in der Ungleichung vorkommt, ist x eine beliebig Zahl. Solche Horizontalstreifen verwendet man meistens offen, d. h. ohne die Randlinien $y = 1{,}5$ und $y = 4{,}5$.

Für mathematische Untersuchungen von Funktionen oder Zahlenfolgen benötigt man dynamische Horizontalstreifen, darunter versteht man Streifen bzw. Umgebungen mit einem veränderbaren Radius.
Diesen nennt man traditionell ε (Epsilon).

MERKE: Unter einer ε – Umgebung einer Zahl a versteht man die offene Umgebung mit dem Radius ε ($\varepsilon > 0$).
Diese kann man als Intervall darstellen: $U_\varepsilon(a) = \left]\, a-\varepsilon\,;\, a+\varepsilon \,\right[$
oder durch eine Doppelungleichung: $a-\varepsilon < y < a+\varepsilon$
oder durch eine Betragsungleichung: $|y-a| < \varepsilon$

d) Eine ε – Umgebung der Zahl 3 kann so aussehen wie oben, nur eben ist der Radius ε, und diesen kann man bei Bedarf sehr klein machen, d. h. man lässt ε gegen 0 gehen.
$|y-a| < \varepsilon$ mit $\varepsilon = 0{,}01$ oder $\varepsilon = 10^{-5}$ usw.